Séquence 11

Modéliser le hasard, calculer les probabilités

Contenu :

- Univers, événement, intersection, réunion
- Loi de probabilité, probabilité d'un évènement
- Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres

I. Vocabulaire des probabilités

Activité 1 (déclic) : Introduire le vocabulaire lié aux probabilités

A. Univers, issues et événements

Définitions :

- Une expérience aléatoire est une expérience dont on connait tous les résultats possibles sans savoir à l'avance celui que l'on obtiendra.
- On appelle issue un résultat possible d'une expérience aléatoire.
- On appelle univers l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le note souvent Ω (oméga)
- Un événement est une partie (ou sous ensemble) de l'univers.
- Un événement élémentaire est un événement formé d'une seule issue ;
- Un événement impossible est un événement qui ne peut pas se réaliser, il ne contient aucune issue. On le note $\emptyset$.
- Un événement certain est toujours réalisé ; il contient tous les éléments de l'univers.

Exemples : On lance un dé à six faces et on s'intéresse au numéro obtenu.

1) Déterminer l'univers associé à cette expérience.

2) Soit A l'événement « obtenir un numéro pair ». Déterminer les issues de cet événement.

3) Citer un événement certain et un évènement impossible.

Définition : Soient A et B deux événements.

- A et B sont complémentaires lorsque A est formé de tous les événements de l'univers qui ne sont pas dans B. On dit que B est l'événement contraire de A et on le note $\bar{A}$.

- A et B sont incompatibles ou disjoints lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, ils n'ont aucune issue en commun.

Schéma explicatif :

Exemple : on lance un dé à six faces et on note

C = {1 ;2}, D = {3 ;4 ;5 ;6}, E = {3 ; 5} et F = {1 ; 6}.

Citer les événements complémentaires et les évènements incompatibles.

B. Intersection et réunion d'événements

Définition : Soients A et B deux événements.

- L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'événement formé des issues appartenant à la fois à A et B.
- La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'événement formé des issues qui appartiennent à A ou à B.

Schéma explicatif :

Exemple : Dans le lancer d'un dé à six faces, soient G = {1 ; 2 ; 3} et H = {3 ; 4}.

Déterminer $H \cup G \;\; et \; H \cap G$.

Exercices d'application : 22 p 341, 42 et 43 p. 343

II. Probabilité sur un ensemble fini

A. Loi de probabilité sur un ensemble fini

Activité 2 (déclic) : Calculer la probabilité d'un événement à partir d'événements élémentaires

Définition : On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est fini et est formé de n issues : $\Omega =$

Définir une loi de probabilité sur Ω c'est associer à chaque événement élémentaire e_i sa probabilité p_i.

Exemple : loi de probabilité du lancer d'un dé équilibré.

Propriétés : La probabilité d'un événement A, notée P(A), est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.

Exemple : Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher. Trois jetons portent le numéro 1, deux portent le numéro 2 et les autres portent le numéro 3. On tire au hasard un jeton et on note son numéro. Définir la loi de probabilité associer à cette expérience.

B. Situation d'équiprobabilité

Lorsque tous les événements élémentaires formant l'univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité sur Ω.

Propriété : En situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, la probabilité d'un événement A est donné par :

$$P(A) = \frac{nombre\ d'issues\ réalisant\ A}{nombre\ d'issues\ totales}$$

Démonstration :

Exemple : Citer deux situations d'équiprobabilité.

C. Calcul de probabilités

Activité 4 : établir le lien entre probabilité de l'intersection et de la réunion de deux événements

Propriétés :

1) Si A et B sont deux événements incompatibles, on a alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2) Pour tous événements A et B, on a :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

On déduit :

3) Soit A un événement quelconque et $\bar{A}$ son événement contraire.

On a :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Démonstrations :

Exemple On lance un dé numéroté de 1 à 6. Soient les événements A « obtenir un résultat pair » et B « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».

Calculer $P(A \cap B), P(A \cup B)$ et $P(\bar{B})$.

Exercices d'applications :