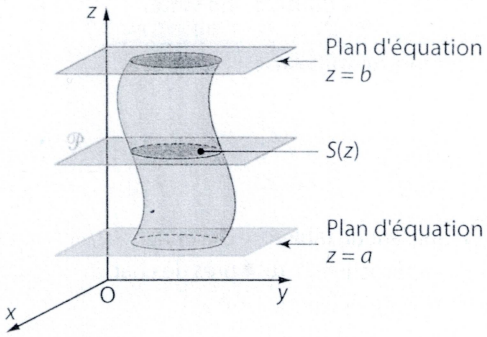
APPROFONDISSEMENT

Calculs de volumes

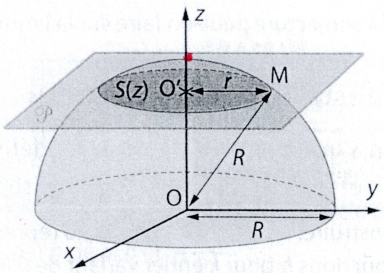
On a obtenu dans ce chapitre des aires de surfaces en utilisant des calculs d'intégrale.
On va ici s'intéresser à des calculs de volume de certains solides.
Pour cela on se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.



Un problème : On considère un solide de l'espace compris entre deux plans parallèles au plan (xOy), d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ $(0 < a < b)$.
Le volume d'un tel solide est donné par $V = \int_a^b S(z)\,dz$, où $S(z)$ est l'aire de la section de ce solide par un plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (xOy), de cote z comprise entre a et b.

Étude de ce problème

On veut déterminer le volume d'une sphère de rayon R.
Pour cela, on commence par déterminer le volume de la demi-sphère de centre l'origine O du repère et de rayon R.



› Expliquer pourquoi ici $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$.

› Calculer alors le volume de la demi-sphère de rayon R.

› Comparer avec la formule connue donnant le volume d'une sphère de rayon R.

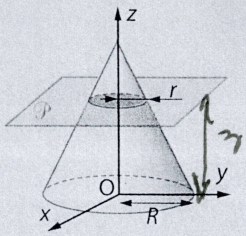
Applications

140 On considère un cylindre d'axe (Oz), de rayon R et de hauteur h.

1. Quelle est l'aire de la section de ce cylindre par un plan parallèle au plan (xOy) et de cote z ?

2. Calculer le volume de ce cylindre.

141 On considère un cône de révolution d'axe (Oz), de hauteur h, de base un cercle de centre O et de rayon R dans le plan (xOy).



1. La section de ce cône par un plan parallèle au plan (xOy) de cote z telle que $0 \leqslant z \leqslant h$, est un cercle de rayon r. Exprimer r en fonction de R, h et z.

2. Déterminer l'aire de cette section en fonction de R, h et z.

3. Calculer le volume de ce cône. Comparer avec la formule connue donnant le volume d'un cône en fonction de sa hauteur et du rayon de sa base.

142 Dans le plan d'équation $z = 0$, on considère une courbe représentant une fonction f continue sur $[a\,;b]$.
Par rotation autour de l'axe $(x'x)$, cette courbe engendre une surface de révolution d'axe $(x'x)$.
Cette surface délimite un solide de révolution d'axe $(x'x)$.

1. La section de ce solide par un plan perpendiculaire à $(x'x)$ est un disque.

a. Exprimer l'aire de ce disque à l'aide de $f(x)$.

b. Quelle est l'intégrale qui permet de calculer son volume ?

2. Déterminer le volume du solide de révolution d'axe $(x'x)$ engendré par la rotation de la courbe représentative de la fonction sinus sur $[0\,;\pi]$.

3. Déterminer le volume du solide de révolution d'axe $(x'x)$ engendré par la rotation de la courbe représentative de la fonction exponentielle sur $[-1\,;1]$.