Séquence 3 :

Second degré (partie 2)

I. Forme canonique d'un trinôme

Propriété : Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :

f(x)=☺(x - ☺)² + ☺

où ☺, ☺ et ☺ sont des nombres réels.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 20x + 10 \\
&= 2\left[x^2 - 10x\right] + 10 \\
&= 2\left[x^2 - 10x + 25 - 25\right] + 10 \\
&= 2\left[(x-5)^2 - 25\right] + 10 \\
&= 2(x-5)^2 - 50 + 10 \\
&= 2(x-5)^2 - 40
\end{aligned}
$$

car $x^2 - 10x$ est le début du développement de $(x-5)^2$

et $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$\boxed{f(x) = 2(x-5)^2 - 40}$ $\rightarrow$ *forme canonique de f*

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c$$
$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\frac{b^2}{4a^2}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$
$$=a(x-\alpha)^2+\beta$$

$$\alpha=-\frac{b}{2a}$$

$$\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Remarque : Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β… à condition de les connaître !

II. Variations et représentation graphique d'un trinôme

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a\neq 0$

- Si $a>0$, f admet un minimum pour $x=\alpha$. Ce minimum est égal à β.

- Si $a<0$, f admet un maximum pour $x=\alpha$. Ce maximum est égal à β.

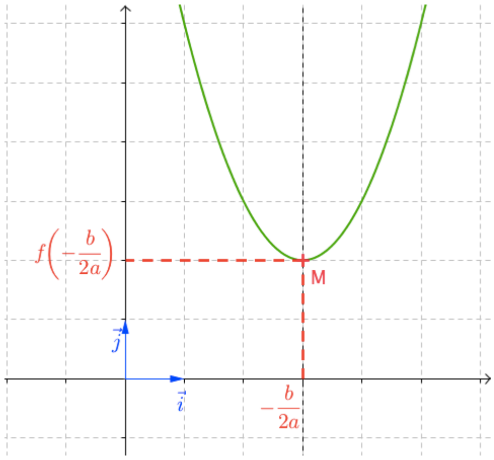
Remarque :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $\boldsymbol{x'}=\frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}$

(Voir résultat de la démonstration dans II.)

-Si $a > 0$



- Si $a < 0$, on obtient une parabole avec « les bras » tournés vers le bas.

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est **une parabole.**

Le point M de coordonnées $\frac{-b}{2a}$; $f\left(\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est le **sommet** de la parabole. Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction *f.*

La parabole possède un **axe de symétrie.** Il s'agit de la droite d'équation : $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemple d'application :

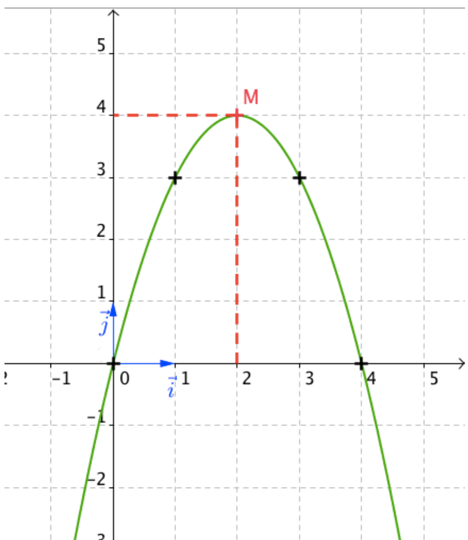
Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + 4x \\
&= -\left(x^2 - 4x\right) \\
&= -\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) \\
&= -\left(\left(x-2\right)^2 - 4\right) \\
&= -\left(x-2\right)^2 + 4
\end{aligned}
$$

f admet donc un maximum en 2 égal à

$f(2) = -(2-2)^2 + 4 = 4$



Les variations de f sont donc données

par le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	?	$\nearrow$	4	$\searrow$	?

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

- La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = \frac{-b}{2a}$, soit $x = -\frac{12}{4.}$

La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

- Les coordonnées de son sommet sont $\frac{-b}{2a}$; $\frac{f((-b))}{2a}$,

Le point de coordonnées $(3\,; -17)$ est donc le sommet de la parabole.

$\text{A} = 2 > 0$ Ce sommet correspond à un minimum.