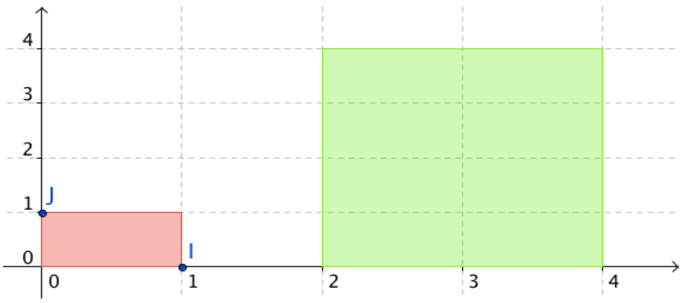
Séquence 18

Calcul intégral – Partie 1

I. Intégrale et aire

A. Unité d'aire

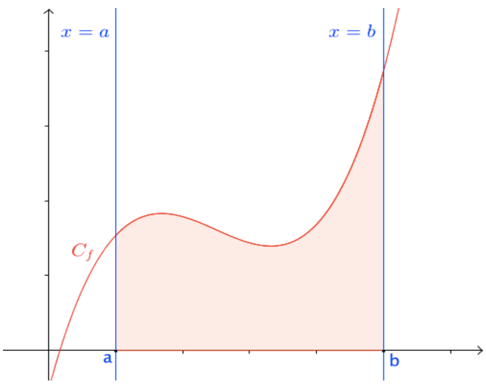
Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).



B. Définition

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\ ;b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



C. Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a\,;b]$ se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Et on lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».

Remarques :

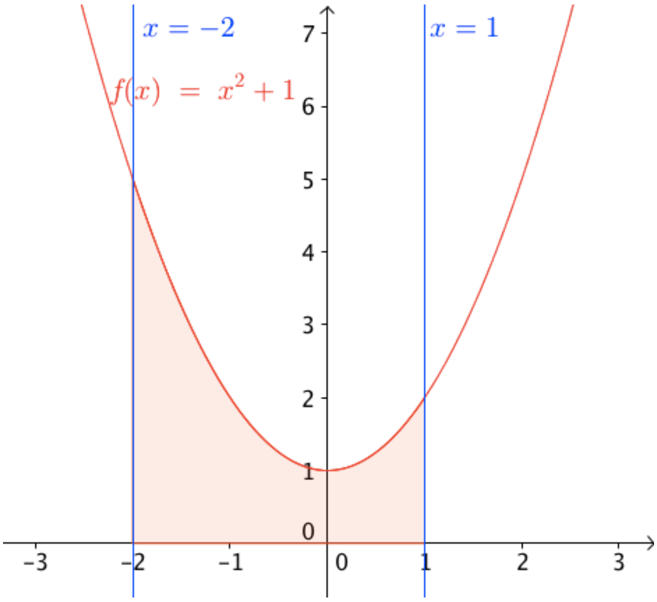
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

"dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 1] et se note $\int_{-2}^{1} x^2 + 1\,dx$.



Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir l'aire cherchée.

Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

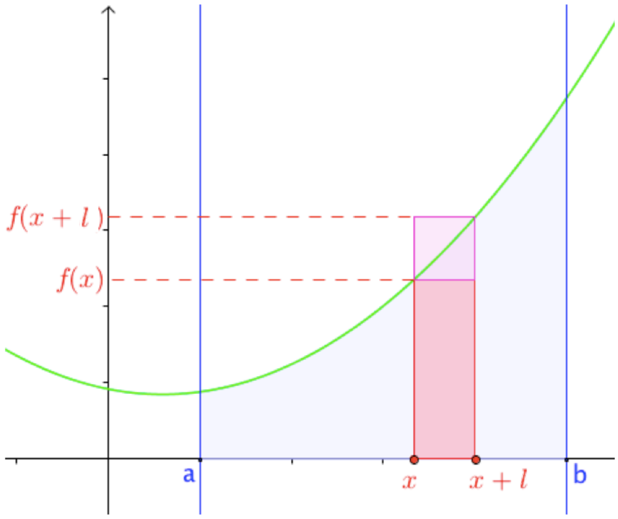
Capacité 1 p. 331

D. Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x\,;x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire l x $f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire l x $f(x+l)$.

Sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".



ALGORITHME P. 330

Exemple d'application : capacité 2 p. 331

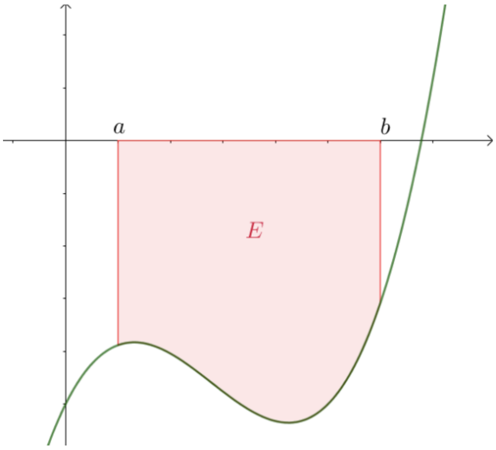
Calculer une intégrale avec la calculatrice Numworks

E. Extension aux fonctions de signe quelconque

Définition :
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ le nombre $I = \int_a^b f(x)\,dx$ défini par :

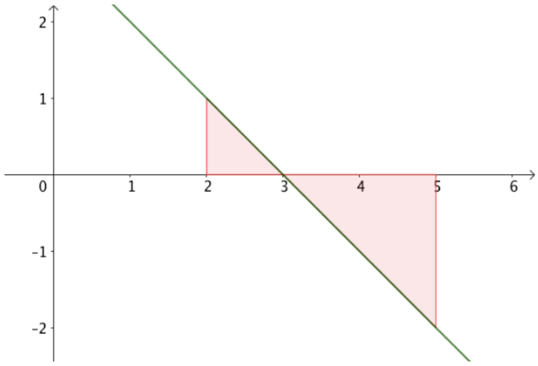
- si f est positive sur $[a\ ;b]$: $I = Aire(E)$,
- si f est négative sur $[a\ ;b]$: $I = -Aire(E)$,

où E est la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple :

$$\int_2^5 (3 - x)\,dx = \frac{1 \times 1}{2} - \frac{2 \times 2}{2} = -1{,}5$$



E. Propriétés

Propriétés :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des réels de I.

$a)$ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$b)$ $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

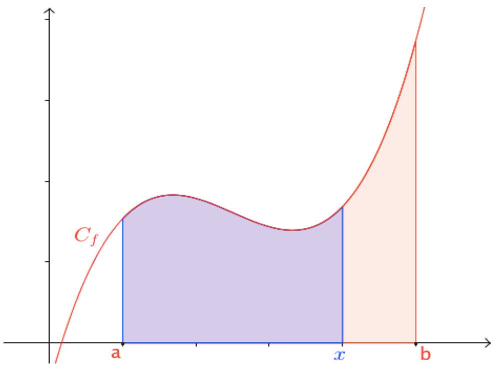
$c)$ Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

II. Intégrale et primitive

A. Fonction définie par une intégrale

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.



Démonstration au programme p. 332

Théorème :
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale
Capacité 3 p. 333

B. Calcul d'intégrales

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration au programme : p. 332

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive
Capacité 4 p. 333

C. Propriété de linéarité

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité
On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$
a) Calculer $A + B$ et $A - B$.
b) En déduire A et B.

D. Inégalités

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Méthode : Encadrer une intégrale
Capacité 5 p. 335