Séquence 12

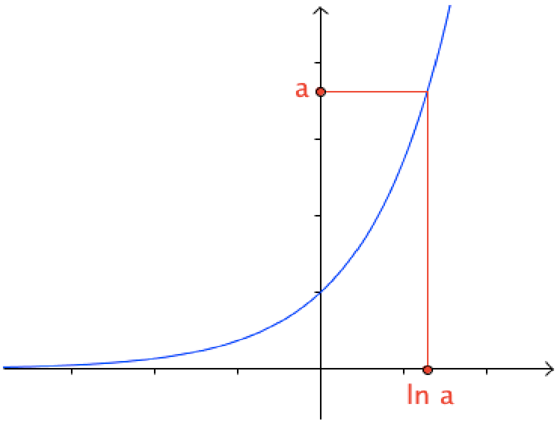
Fonction logarithme – Partie 1

I. Logarithme népérien d'un réel strictement positif

Activité 1 p. 234 : introduction de la fonction réciproque de la fonction exponentielle

A. Définition

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition : On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.
La **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction :

$$\ln :\ ]\mathbf{0}\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

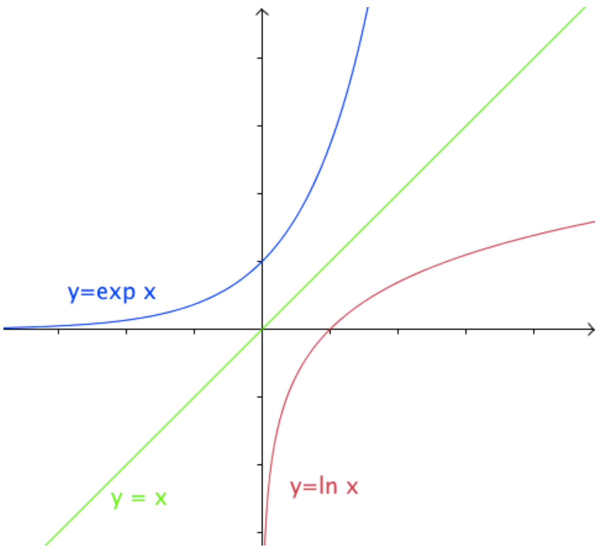
Remarques :

- Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$



B. Conséquences

a) Pour $x > 0$: $y = \ln x \iff x = e^y$

b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

c) $\ln e^x = x$

d) Pour $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

Démonstrations :

II. Propriétés de la fonction logarithme népérien

Activité 3 p. 235 : découvrir les propriétés algébriques de la fonction logarithme

A. Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Démonstration p. 238 :

B. Conséquences

Corollaires :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

d) $\ln x^n = n \ln x$, avec n entier relatif

Démonstrations p. 238 :

Méthode : Simplifier une expression contenant des logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$ $B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$ $C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$

Exercices d'application : capacité 3 p. 239 et exercices

C. Équations et inéquations

Propriétés :
Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
a) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
b) $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

1) Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :
a) $\ln x = 2,\ I =]0\ ;\ +\infty[$ b) $e^{x+1} = 5,\ I = \mathbb{R}$
c) $3\ln x - 4 = 8,\ I =]0\ ;\ +\infty[$ d) $\ln(6x-1) \geq 2,\ I = \left]\frac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[$
e) $e^x + 5 > 4\,e^x, I = \mathbb{R}$
2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

Exercices d’application : capacité 1 p. 237 et exercices