Séquence 16

Représentation paramétrique et équations

I. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit une droite d passant par un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

On a : $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x = x_A + at\\y = y_A + bt\\z = z_A + ct\end{cases}$

Remarque :

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite d.

Démonstration :

$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\\z - z_A\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x - x_A = at\\y - y_A = bt\\z - z_A = ct\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = x_A + at\\y = y_A + bt\\z = z_A + ct\end{cases}$$

Méthode : Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit les points $A\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) :

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\-3-3\\2-(-1)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-6\\3\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

- Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Alors $z = 0$ car M appartient au plan de repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Donc $-1 + 3t = 0$ soit $t = \frac{1}{3}$.

Et donc : $\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ y = 3 - 6 \times \frac{1}{3} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{5}{3}\,;1\,;0\right)$.

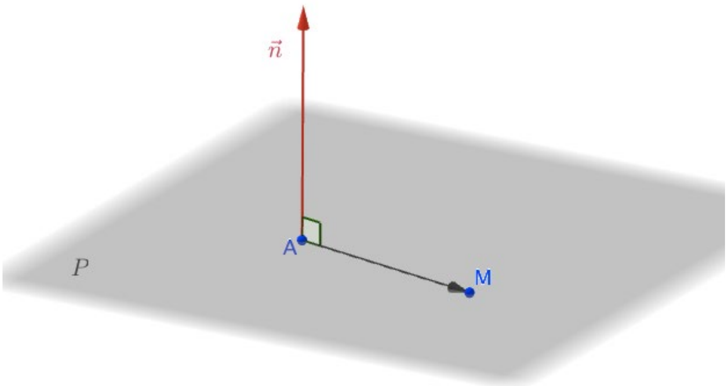
Exercices d'application : capacité 9 et 10 p. 59 et exercices

II. Équation cartésienne d'un plan

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan.

Démonstration au programme :



- Soit un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ de P.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$

- Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).

On note E l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$

Alors le point $A\left(-\frac{d}{a}\ ;0\ ;0\right)$ vérifie l'équation $ax+by+cz+d=0$. Et donc $A\in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on a :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a\left(x+\frac{d}{a}\right)+b(y-0)+c(z-0)=\ ax+by+cz+d=0.$

E est donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple :

Le plan d'équation cartésienne $x-y+5z+1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

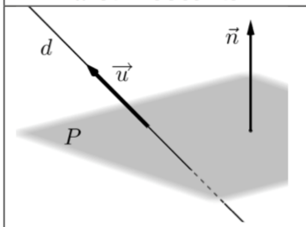
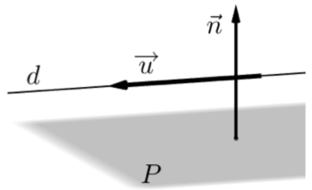
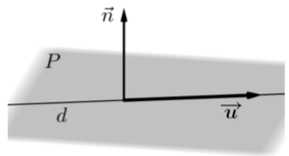
- Une équation cartésienne de P est de la forme $3x-3y+z+d=0$.
- Le point A appartient à P donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$3\times(-1)-3\times 2+1+d=0$ donc $d=8$.

Une équation cartésienne de P est donc : $3x-3y+z+8=0$.

Exercices d'application : capacité 9 p. 97 et exercices

III. Positions relatives d'une droite et d'un plan

<table>
<tr><td rowspan="2">Positions relatives
- Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$
- Plan P de vecteur normal $\vec{n}$</td><td rowspan="2">d et P sécants
</td><td colspan="2">d et P parallèles</td></tr>
<tr><td>d et P strictement parallèles
</td><td>d incluse dans P
</td></tr>
<tr><td>Vecteurs</td><td>$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux</td><td colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux</td></tr>
<tr><td>Produit scalaire</td><td>$\vec{u}.\vec{n}\neq 0$</td><td colspan="2">$\vec{u}.\vec{n}=0$</td></tr>
</table>

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

- Capacité 12 p 98

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

- Capacité 11 p 98

Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives :
$2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$.
Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

Les plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.
Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$.
$\vec{n}.\overrightarrow{n'}=2\times2+4\times(-5)+4\times4=0$
Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux donc les plans P et P' sont perpendiculaires.