Séquence 14

Fonction logarithme népérien – Partie 2

I. Étude de la fonction logarithme népérien

A. Continuité et dérivabilité

Activité 2 p. 234 : conjecturer la dérivée de la fonction logarithme

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.

Propriétés :

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ pour tout réel x de I. La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$\mathbf{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

$$\textbf{Soit } \big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}$$

Démonstration au programme :

Exemple :

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

Exercices d'application : capacité 2 p. 237 et exercices

B. Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

C. Convexité

Propriété : La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

D. Limites aux bornes

Propriétés : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Méthode : Utiliser les limites de la fonction logarithme
Capacité 5 p. 241 et exercices

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$(\ln x)'$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$		$+\infty$

E. Tangentes particulières

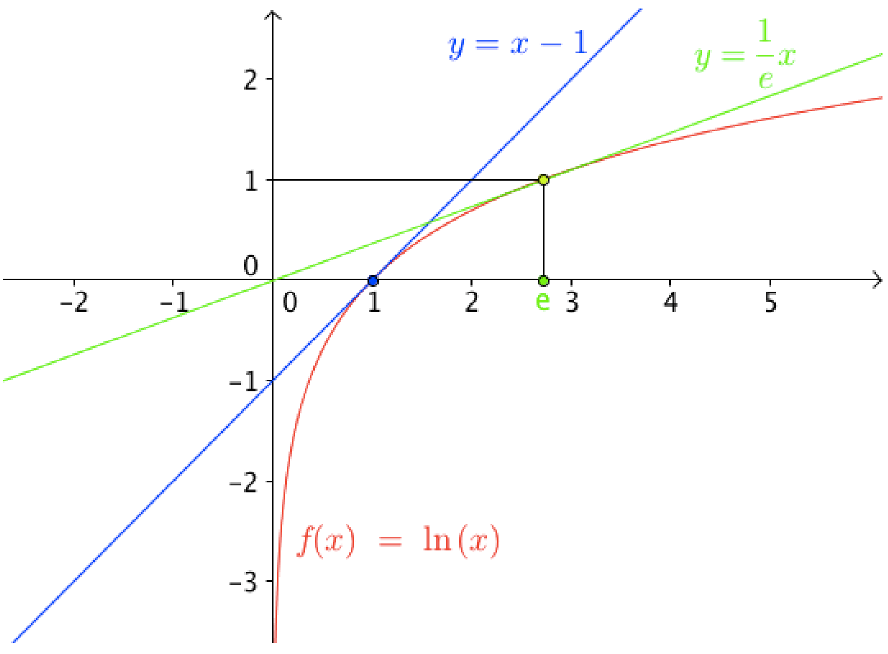
Rappel : Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Dans le cas de la fonction logarithme népérien, l'équation est de la forme :
$y = \frac{1}{a}(x - a) + \ln a$.

- Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{1}(x - 1) + \ln 1$ soit :
$y = x - 1$.
- Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{e}(x - e) + \ln e$ soit :
$y = \frac{1}{e}x$.

F. Courbe représentative

Valeurs particulières :
$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$



II. Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$

Démonstration du b. dans les cas où $n = 1$ (au programme) :

Remarque : Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Méthode : Déterminer une limite par croissance comparée

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$ $\qquad$ $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x-1}$

Exercices d'application : capacité 6 p. 241 et exercices

III. Études de fonctions contenant des logarithmes

Méthode : Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

1) Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
$f(x) = 3 - x + 2\ln x$

2) Étudier la convexité de la fonction f.

Méthode : Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{x}$

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

Exercices d'application :