Séquence 15

Primitives et équations différentielles

I. Primitive d'une fonction continue

A. Equation différentielle $y' = f$

Activité 1 p. 294 : découvrir la notion d'équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemples :

a) L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.

Dans ce cas, une solution de cette équation est $y = 5x$. En effet, $(5x)' = 5$.

b) Une solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.

Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.

Par exemple, $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle.

En effet, $(x^2 + 1)' = 2x$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Plus généralement, une équation différentielle du premier ordre est une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable f, sa dérivée f' et la variable x. L'inconnue de cette équation est la fonction f.

Exercices d'application : capacité 1 p. 297 et exercices

B. Primitive d'une fonction

Activité 2 p. 294 : découvrir les primitives des fonctions de référence

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

« Fa pour dérivée f» et « f a pour primitive F».

Exemple :

Déterminer une primitive de $f(x) = x$ et justifier.

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration au programme p. 296 :

Propriété : $f$est une fonction continue sur un intervalle I.

Si F est une primitive de $f$sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de $f$sur I.

Démonstration :

Exemple :

Déterminer toutes les primitives de la fonction $f(x) = x$.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration p. 238

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Exercices d'application : capacité 2 p. 297 et exercices

C. Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$ pour $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

Exercices d'application : capacité 3 p. 299 et exercices

D. Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstrations :

E. Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0, u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

Exercices d'application : capacité 4 p. 299 et exercices

II. Équations différentielles

A. Équations différentielles du type $y' = ay$

Activité 3 p. 295 : résolution d'une équation différentielle

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme p. 300 :

Exercices d'application : capacité 5 p. 301 et exercices

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :

B. Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$. Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto u(x) + v(x)$$

où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$

et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercices d'application : capacité 6 p. 301 et exercices

C. Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto u(x) + v(x)$$

où u est une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$
et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Exercices d'application : capacité 7 p. 301 et exercices