**Séquence 2**

**Limite des fonctions – Partie 1**

I. Limite d’une fonction et asymptote

Activité 2 p. 164 : introduction de la notion de limites à l’infini et en un point.

A. Limite à l’infini

1) Limite infinie à l’infini

* Exemple :

La fonction définie par a pour limite lorsque tend vers .

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que est suffisamment grand.

Si on prend un réel quelconque, l'intervalle contient toutes les valeurs de la fonction dès que est suffisamment grand.

* Interprétation graphique :



* Définitions

- On dit que la fonction admet pour limite en si tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand et on note :

- On dit que la fonction admet pour limite en si tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand et on

note :

2) Limite finie à l’infini

* Exemple :

La fonction définie par a pour limite 2 lorsque *x* tend vers .

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que *x* est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que *x* est suffisamment grand.

* Interprétation graphique :



* Définition :

On dit que la fonction admet pour limite en si tout intervalle ouvert contenant contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand et on note : .

* Définition Asymptote horizontale :

La droite d'équation est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction *f* en si .

- La droite d'équation est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction *f* en si .

B. Limite d’une fonction en un réel A

* Exemple :

 La fonction représentée ci-dessous a pour limite lorsque tend vers .

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que *x* est suffisamment proche de .

Si on prend un réel quelconque, l'intervalle contient toutes les valeurs de la fonction dès que est suffisamment proche de .



* Définitions

 - On dit que la fonction admet pour limite **** en si tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment proche de et on note : .

- On dit que la fonction admet pour limite **** en si tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment proche de et on

note :

* Définition asymptote verticale

La droite d'équation est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction , si : ou .

* Exemple et remarque

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel selon ou

**.

**Considérons la fonction inverse définie sur par .**

- Si  : Lorsque tend vers 0, tend vers et on note :

 ou .

- Si  : Lorsque tend vers 0, tend vers et on note :

ou .

On parle de **limite à gauche de 0** et de **limite à droite de 0**.

C. Applications

Déterminer graphiquement les limites d’une fonction et en déduire la présence d’asymptotes éventuelles.

* Capacité 1 et 2 p. 167 et exercices

II. calcul des limites

A. Opérations sur les limites

1) Limite d’une somme

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* | *L* | *L* |  |  |  |
|  | *L'* |  |  |  |  |  |
|  | *L + L'* |  |  |  |  | F.I.\* |

\*F.I = Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Limite d’un produit

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* | *L* |  | 0 |
|  | *L'* |  |  |  |
|  | *L L'* |  |  | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est ou .

Exemple :

3) Limite d’un quotient

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* |  *L* 0  | *L* |  |  | 0 |
|  | *L'* 0 |  0  |  |  *L* |  | 0 |
|  |  |  | 0 |  | F.I. | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est ou

Exemple :

Remarque :

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

, "", et .

B. Limite à l’infini

1) Limites de fonctions usuelles

Propriétés :

- ,

- ,

- , (pour *n* pair)

- , (pour *n* impair)

-

- ,

- ,

2) Limites d’une fonction polynôme

Propriété :

En et , une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Exemples :

3) Limite d’une fonction quotient

Propriété

Soient P une fonction polynôme dont est le monôme du plus haut degré, et Q une fonction polynôme dont le monôme du plus haut degré est , où p et q sont deux entiers naturels.

Alors

Exemples :

4) Applications

 1) 2) 3)

Exercices :

C. Limite en un nombre

1) Limites de fonctions usuelles

Propriétés

* Pour tout n appartenant à N\*, si n est pair,
* Pour tout n appartenant à N\*, si n est impair, la fonction a pour limite quand x tend vers 0 avec . On parle de limite à droite en 0. Quand x tend vers 0 avec , elle a pour limite . On parle de limite à gauche en 0.

2) Quelques exemples d’étude

1)

2)

Exercices d’application